数理解析研究所講究録
881巻 1994年 9-16

多変数正則写像の星型性と凸型性

熊本大学 教育 金丸忠義 (Tadayoshi Kanemaru)

1変数関数の場合，単位円板で単葉な正則関数が星型，凸型になるための必要十分条件はそれぞれよく知られている．多変数の場合，定義域が多重円板または球である単葉な正則写像の星型，凸型条件はT. Matsuno ([1]), T. A. Suffridge([2])によって，それぞれ独立に得られている．ここでは，定義域がなめらかな境界をもつ$\mathbb{C}^n$の有界領域の場合に双正則写像が星型，凸型になるための必要十分条件を求める．

1. 準備

$\mathbb{C}^n$の点zを$z=(z_1, \cdots, z_n)'$と列ベクトルで表す．zのノルム$|z|$を$|z|=\sqrt{z^*z}=\sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2}$と定義する．ここに，$'$は転置を$*$は転置共役を表す．正則写像を
$w=w(z)=(w_1(z), \cdots, w_n(z))'$と列ベクトルで表す．
ここに，各$w_j(z)$, $j=1, 2, \cdots, n$は正則関数とする．

正則写像のヤコビアン行列を

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \times w = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial w_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial w_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

で表す. ここに, × はクロネッカー積で,

$\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$ とする. このとき,

$$dw = \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

が成り立つ. ただし, $dz = (dz_1, \cdots, dz_n)'$ とする.

また, 次のように定める.

$$\frac{\partial}{\partial z^*} = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^*, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z^* \partial z} = \frac{\partial}{\partial z^*} \times \frac{\partial}{\partial z} \times w.$$

後に用いる行列の微分に関する公式をあげる.

(1) $$\frac{\partial}{\partial z}(AB) = \frac{\partial A}{\partial z}(E_n \times B) + A\frac{\partial B}{\partial z},$$

ここに, A, B はそれぞれ $k \times l$, $l \times m$ 行列, E_n は n 次単位行列とする.

(2) $$\frac{\partial}{\partial z} A^{-1} = -A^{-1}\frac{\partial A}{\partial z}(E_n \times A^{-1}),$$

ここに, A は $m \times m$ 正則行列とする.

(3) $$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \times E_q\right),$$

ここに, A は $p \times q$ 行列, z, ζ は同次元のベクトルとする.

$\mathbb{C}^n$のベクトルX, Yのなす角 $ang(X, Y)$を

$$\cos ang(X, Y) = \frac{Re(X^*Y)}{|X||Y|}$$ で定義する.

$D_z \subset \mathbb{C}^n$で定義された写像$w = w(z): D_z \longrightarrow \mathbb{C}^n$は正則で1対1, $\det \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0 \ \forall z \in D_z$のとき, 双正則写像とよばれる.

2. 凸型性

D_zをなめらかな境界をもつ$\mathbb{C}^n$の有界領域とする. $\varphi(z)$をD_zの定義関数とする. すなわち, $\varphi(z)$はC^2級実数値関数で,

$D_z = \{z \mid \varphi(z) < 0\}$, $\partial D_z = \{z \mid \varphi(z) = 0\}$ とする.

$w = w(z)$は$\overline{D}_z$上の正則写像とし, 写像wによるD_zの像領域$D_w = w(D_z)$は次で与えられているとする.

$D_w = \{w \mid \psi(w) < 0\}$, $\partial D_w = \{w \mid \psi(w) = 0\}$, ここに, $\psi(w)$はC^2級実数値関数であるD_wの定義関数とする. このとき, $z \in \partial D_z$に対して, $\psi(w) = \psi(w(z)) = \varphi(z) = 0$が成り立つことに注意する. また, $z \in \partial D_z$に対して,

$$d\varphi(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + dz^* \frac{\partial \varphi}{\partial z^*} = 2 Re\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} dz\right) = 0.$$

したがって, $\frac{\partial \varphi}{\partial z^*}$と$dz$は直交している.

合成関数の微分法より

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{w}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}.$$

$w = w(z)$ は正則だから $\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$ が成り立ち，

(4) $\quad \dfrac{\partial \psi}{\partial w} = \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}$ を得る．さらに，

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \psi}{\partial w}dw\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\frac{\partial w}{\partial z}dz\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}dz\right) = 0.$$

したがって，$\dfrac{\partial \psi}{\partial w^*}$ は ∂D_w 上の法ベクトルである．

<u>定義</u>　D_z 上の双正則写像 $w = w(z)$ は，それによる D_z の像領域 $D_w = w(D_z)$ が凸領域になるとき，すなわち，各 $w \in \partial D_w$ と $|h|$ が十分小さい実数 h に対して $\psi(w + h\,dw) > 0$ が成り立つとき，凸型写像という．

このとき，次の定理を得る．

<u>定理</u>　D_z をなめらかな境界をもつ $\mathbb{C}^n$ の有界領域とする．$\varphi(z)$ を D_z の定義関数とする．$w = w(z)$ を $\bar{D}_z$ 上の双正則写像とする．このとき，$w = w(z)$ が凸型写像になるための必要十分条件は次が成り立つことである．

(5) $\quad \mathrm{Re}\left\{\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)(dz \times dz) + dz^*\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^*\partial z}dz\right\} > 0, \quad z \in \partial D_z.$

証明　C^2 級実数値関数 $\psi(w + h\,dw)$ は次のように展開される．

$$\psi(w + h\,dw) = \psi(w) + h\left(\frac{\partial \psi}{\partial w}dw + dw^*\frac{\partial \psi}{\partial w^*}\right)$$
$$+ \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2}dw^2 + 2dw^*\frac{\partial^2}{\partial w^*\partial w}dw + dw^{*2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial w^{*2}}\right) + \cdots,$$

したがって，$\psi(w + h\,dw) > 0$ になるためには，

$$(6)\quad \psi(w)=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial w}dw + dw^*\frac{\partial\psi}{\partial w^*} = 0,$$

$$(7)\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}dw^2 + 2dw^*\frac{\partial^2}{\partial w^*\partial w}dw + dw^{*2}\frac{\partial^2\psi}{\partial w^{*2}} > 0.$$

すなわち、

$$(8)\quad \mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}dw^2 + dw^*\frac{\partial^2}{\partial w^*\partial w}dw\right) > 0$$

が成り立つことが必要十分である. 公式(1), (2), (3), (4)を用いて計算すると次を得る.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2} = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\right)\left(\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\times E\right)$$

$$=\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\left(E\times\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\right\}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\times E\right)$$

$\therefore$

$$(9)\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial w^2}dw^2 = \left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\times\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\times E\right)\right\}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial z}\times\frac{\partial w}{\partial z}\right)(dz\times dz)$$

$$=\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(dz\times dz) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left(E\times\frac{\partial w}{\partial z}\right)(dz\times dz)$$

$$=\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(dz\times dz) - \frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\left(E\times\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\right)\left(E\times\frac{\partial w}{\partial z}\right)(dz\times dz)$$

$$=\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(dz\times dz) - \frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(dz\times dz)$$

$$=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)(dz\times dz).$$

さらに、

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial w^*\partial w} = \frac{\partial}{\partial w^*}\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1*}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^*\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}.$$

∴

$$(10)\quad dw^*\frac{\partial^2\psi}{\partial w^*\partial w}dw = dz^*\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^*\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1*}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^*\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\frac{\partial w}{\partial z}dz = dz^*\frac{\partial^2\psi}{\partial z^*\partial z}dz.$$

(9), (10) を (8) に代入して (5) を得る.

<u>系</u>　単位球 $\{z\in\mathbb{C}^n \mid z^*z\leqq 1\}$ 上の双正則写像 $w=w(z)$ が凸型になるための必要十分条件は $z^*z=1$ に対して次が成り立つことである.

$$(11)\quad \mathrm{Re}\left\{-z^*\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(dz\times dz)+dz^*dz\right\}>0.$$

証明　$\varphi(z)=z^*z-1$ だから, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=z^*$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^*\partial z}=E$.
これらを (5) に代入して, (11) を得る.

<u>系</u>　単位円板 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leqq 1\}$ 上で単葉, 正則な関数 $w=w(z)$ が凸型になるための必要十分条件は, $|z|=1$ に対して,

$\mathrm{Re}\left(z\dfrac{w''}{w'}+1\right)>0$ が成り立つことである.

証明　$|z|=1$ より $z=e^{i\theta}$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ とかける. したがって, (11) は次のようになる.

$$\mathrm{Re}\left\{-z^*\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)(-z^2d\theta^2)+z^*z\,d\theta^2\right\}>0.$$

$$\mathrm{Re}\left\{|z|^2\left(z\frac{w''}{w'}+1\right)d\theta^2\right\}>0\qquad\therefore\ \mathrm{Re}\left(z\frac{w''}{w'}+1\right)>0.$$

3. 星型性

<u>定義</u>　有界領域 $D_z\subset\mathbb{C}^n$ 上の双正則写像 $w=w(z)$ が星型とは $w=w(z)$ による D_z の像領域 $D_w=w(D_z)$ が原点に関

して，星型であるときにいう．すなわち，次が成り立つことである． $0 < \mathrm{ang}\left(\frac{\partial w}{\partial z^*}, w\right) < \frac{\pi}{2}$， $w \in \partial D_w$．

この定義のもとで次の定理を得る．

定理　D_z をなめらかな $\mathbb{C}^n$ の有界領域とする．$\varphi(z)$ を D_z の定義関数とする．$\bar{D}_z$ 上の双正則写像 $w = w(z)$ が星型になるための必要十分条件は次が成り立つことである．

(12)　$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} w\right\} > 0, \quad z \in \partial D_z.$$

証明　定義より，

$$\cos \mathrm{ang}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w^*}, w\right) = \frac{\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w} w\right)}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial w^*}\right| |w|}.$$

$0 < \mathrm{ang}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w^*}, w\right) < \frac{\pi}{2}$，$w \in \partial D_w$ なるためには，

(13)　$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w} w\right) > 0$ が成り立つことが必要十分である．

しかるに，$\frac{\partial\varphi}{\partial w} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}$．したがって，(13) は (12) となる．

系　単位球 $\{z \in \mathbb{C}^n \mid z^* z \leqq 1\}$ 上の双正則写像 $w = w(z)$ が星型になるための必要十分条件は $z^* z = 1$ に対して，次が成り立つことである．

$$\mathrm{Re}\left\{z^*\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} w\right\} > 0$$

証明　$\varphi(z) = z^* z - 1$ だから $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = z^*$．したがって定理から直ちに系が従う．

注意　特に $n = 1$ のとき，(12) は

$\mathrm{Re}\left(\bar{z}\frac{w}{w'}\right) > 0$　すなわち　$\mathrm{Re}\left(z\frac{w'}{w}\right) > 0$　となる．

これはよく知られた1変数における結果である。

References

[1] T. Matsuno, On star-like theorems and convex-like theorems in the complex vector space, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku 5 (1955), 88-95.

[2] T. A. Suffridge, The principle of subordination applied to functions of several variables, Pacific J. Math., 33 (1970), 241-248.